

**VIII ENCONTRO BRASILEIRO EM MADEIRAS E EM ESTRUTURAS DE MADEIRA
UBERLÂNDIA - JULHO DE 2002**

**ANÁLISE DE TENSÕES E DE DESLOCAMENTOS EM VIGAS ANISOTRÓPICAS COM O AUXÍLIO
DE FUNÇÕES DE TENSÃO**

Leandro Vanalli (vanalli@sc.usp.br)

Universidade de São Paulo - Escola de Engenharia de São Carlos – Depto. de Estruturas

Nilson Tadeu Mascia (Nilson@fec.unicamp.br)

Universidade Estadual de Campinas - Faculdade de Engenharia Civil - Depto. de Estruturas

RESUMO: O estudo do comportamento elástico de sólidos anisotrópicos é de muita importância no âmbito da engenharia estrutural. Muitos materiais, incluindo a madeira, se comportam de forma anisotrópica. Em geral, num material anisotrópico não há simetria e existem diferenças em suas propriedades elásticas. Neste sentido, realizou-se neste artigo, uma análise sobre as distribuições de tensões e de deslocamentos em vigas anisotrópicas, submetidas a carregamentos contínuos polinomiais. Assim, é dada ênfase à aplicação e determinação, com o auxílio do *software* Mathematica, de funções de tensão, consoantes com aquelas desenvolvidas por LEKHNITSKII et al (1968) e por HASHIN (1967). Para uma melhor investigação dessas soluções, comparações em termos de tensões e de deslocamentos, com estruturas de material isotrópico, foram realizadas. Para isso, foi necessário a utilização das madeiras das espécies *guapuruvu* e *ipê* como exemplos de materiais anisotrópicos. Os resultados obtidos por essa pesquisa fornecem informações que contribuem para a aplicação dos sólidos anisotrópicos em estruturas da construção civil.

Palavras-chave: Anisotropia, Funções de tensão, Elasticidade.

**ANALYSIS OF STRESSES AND DISPLACEMENTS IN ANISOTROPIC BEAMS USING THE
STRESS FUNCTIONS**

ABSTRACT: The study of elastic behavior of anisotropic bodies is very important in the scope of the structural engineering. Many materials, including wood, have an anisotropic behavior. In general, in anisotropic material there is no symmetry and there are differences in these elastic properties. In this context, in this paper, it was performed an analysis about the stress and displacement distributions in anisotropic beams under polynomial loads. This way, it was emphasized the application and the determination of the stress functions using the Mathematica software, which are consonants with those developed by LEKHNITSKII et al (1968) and HASHIN (1967). For one better inquiry of these solutions, comparisons, in terms of stresses and displacements, with structures of isotropic material had been carried out. For this, it was necessary the use of wood species, *guapuruvu* and *ipê*, as example of anisotropic materials. The obtained results by this research supply information that contributes for the application of the anisotropic materials in structures of the civil construction.

Keywords: anisotropy, stress functions, elasticity.

1. INTRODUÇÃO

O estudo do comportamento elástico de sólidos anisotrópicos é de muita importância no âmbito da engenharia estrutural. Muitos materiais, incluindo a madeira, se comportam de forma anisotrópica. Dessa maneira, na teoria da Elasticidade, tem-se buscado no decorrer dos anos, a idealização de modelos que possam interpretar o comportamento elástico dos sólidos anisotrópicos. Em geral, um modelo anisotrópico estabelece que não há simetria no material e que existem diferenças em suas propriedades elásticas.

Nos sólidos anisotrópicos, quando estes são submetidos a situações de carregamento, surgem deformações outras das apresentadas pelos sólidos considerados isotrópicos. Essas deformações estão associadas a certas constantes de elasticidade, chamadas de coeficientes de influência mútua, que quantificam a influência de tensões normais em deformações tangenciais e de tensões tangenciais em deformações normais.

Buscando-se uma contribuição para os estudos sobre anisotropia, são analisadas, neste trabalho, as distribuições de tensões e de deslocamentos em vigas anisotrópicas submetidas a carregamentos contínuos polinomiais. Assim, é dada ênfase à aplicação e determinação com o auxílio do *software* Mathematica, de funções de tensão consoantes com aquelas desenvolvidas por LEKHNITSKII et al (1968) e HASHIN (1967), e que fornecem as soluções das equações diferenciais que modelam alguns problemas de Elasticidade.

Procura-se também neste artigo, evidenciar as diferenças de comportamento das tensões e dos deslocamentos entre vigas anisotrópicas e isotrópicas. Para tanto, elaborou-se alguns gráficos comparativos baseando-se nas soluções obtidas por LEKHNITSKII et al (1968) e por HASHIN (1967), adotando-se duas espécies de madeiras, *guapuruvu* (*Schizolobium parahyba*) e *ipê* (*Tabebuia sp*), como exemplos de materiais anisotrópicos.

2. A APLICAÇÃO DAS FUNÇÕES DE TENSÃO DE AIRY (ϕ) NA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS PLANOS

Para um problema plano anisotrópico, segundo TING (1996), tem-se a lei constitutiva:

$$e_m = S_{mn} s_n \quad (m, n = 1, 2, 6) \quad (1)$$

Desconsiderando-se a ação das forças de volume, as equações de equilíbrio podem ser escritas, em notação indicial:

$$s_{i1,1} + s_{i2,2} = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (2)$$

As equações de equilíbrio são satisfeitas pela introdução da função de tensão de Airy (ϕ):

$$s_{11} = f_{,22} ; \quad s_{22} = f_{,11} ; \quad s_{12} = -f_{,12} \quad (3)$$

Substituindo-se a Equação 9 na Equação 1 e esse resultado na equação de compatibilidade:

$$e_{1,22} + e_{2,11} - e_{6,12} = 0 \quad (4)$$

obtém-se a seguinte equação diferencial: